平成 28 年度 電気通信大学 特別編入学試験 数学 大問 1

3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに、線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}f$ と P の共通部分 $l = \mathrm{Im}f \cap P$ は, $\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる. $\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき, 点 H の座標を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ.

講評

(2) の共通部分を求める際に大量の任意定数を置く必要があり, 煩雑な計算が多い問題ですが, 電通大の独特な線形代数の問題の傾向が詰まった良問でもあります. ただし, 本番ではこのような問題を選択しないほうが良いでしょう.

解説

(1) A に対して行基本変形を施すと, 以下のようになる.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって, $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$.

(2) $\mathrm{Im}f$ は, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\mathrm{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

と表される. また, P については, $x = 2y - z + 4$ であるから, $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

と表される. 次に, $l = \mathrm{Im}f \cap P$ を求める. $\boldsymbol{y} \in l$ とすると, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}f$ かつ $\boldsymbol{y} \in P$ であるから,

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. これを c_1, c_2, c_3, c_4 について解くと, $e_1 \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = e_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{特に}, \ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

となる. したがって,

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

よって, l は, $f_1 \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$l = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

となる. 次に, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \in l$ であるから, ある $s \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる. さらに, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と l は垂直であるから,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{OH}}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

すなわち, $s = \dfrac{40}{11}$ である. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{11} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

であり, H の座標は,

$$\mathrm{H}\left(\frac{12}{11}, \frac{4}{11}, \frac{40}{11}\right).$$

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ より, ある $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\boldsymbol{x} = h_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表されるので,

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 24 \\ -2 & -1 & 8 \\ -6 & -1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であるから,

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 24 \\ -2 & -1 & 8 \\ -6 & -1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これを解くと, $h_1 = 2$, $h_2 = 2$ となり,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$