平成 28 年度 電気通信大学 特別編入学試験 数学 大問 2

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ に対して, 線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する.

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2$$

ただし, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする. $(i = 1, 2)$
さらに, W を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし, 線型写像 $g : W \to W$ を,

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in W)$$

で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker} f$ の基底を求めよ.
(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ.
(3) A の固有値をすべて求めよ.

講評

電通大の線形代数の問題の中では計算も比較的平易で, 表現行列や固有値を求める典型問題です.

解説

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{v}_i$ であるから, $\boldsymbol{x} = [x, y, z]^\top$ とすれば,

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

次に, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を解くと, $c \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となるから, $\mathrm{Ker} f$ の基底は,

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(2) $[g(\boldsymbol{v}_1)\ \ g(\boldsymbol{v}_2)] = [\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2]\ A$ より, A は 2 次正方行列であることがわかる.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\quad g(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

より,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$$

となり，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) 固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とすると，

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

したがって，$\lambda = 1, 3$.