平成 28 年度 電気通信大学 特別編入学試験 数学 大問 3

次の各問いに答えよ.

(1) $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とし, $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ であるとする.

(i) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表わせ.

(ii) z_{uu} を $z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v$ を用いて表わせ.

(2) 関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ.

講評

(1) チェインルールを理解していれば解ける問題です.

(2) 典型的な極値問題です.

解説

(1) (i) $x_u = 2u,\ y_u = 2v$ より,

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = 2(uz_x + vz_y).$$

(ii) (i) より, $z_{uu} = 2\dfrac{\partial}{\partial u}(uz_x + vz_y)$. z_x, z_y が u, v の関数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} z_{uu} &= 2\left(z_x + u\frac{\partial z_x}{\partial u} + v\frac{\partial z_y}{\partial u}\right) \\ &= 2(z_x + u(z_{xx}x_u + z_{xy}y_u) + v(z_{yx}x_u + z_{yy}y_u)) \\ &= 2(z_x + 2u^2 z_{xx} + 2uv(z_{xy} + z_{yx}) + 2v^2 z_{yy}). \end{aligned}$$

$z = f(x, y)$ は C^2 級関数であるから, $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立つ. したがって,

$$z_{uu} = 2(z_x + 2u^2 z_{xx} + 4uvz_{xy} + 2v^2 z_{yy}).$$

(2) 偏導関数を求めると,

$$f_x(x, y) = \cos x - \sin(x + y),\ f_y(x, y) = \cos y - \sin(x + y).$$

$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を解くと, $x = y = \dfrac{\pi}{6}$. よって, $f\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$ が極値の候補である.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x - \cos(x + y) & -\cos(x + y) \\ -\cos(x + y) & -\sin y - \cos(x + y) \end{vmatrix}$$

とすると,

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -1 < 0,\ H\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0.$$

以上から, $f(x, y)$ は, $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ で極大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる.