平成 28 年度 電気通信大学 特別編入学試験 数学 大問 4

次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x^2-y^2)^2+1}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-y\le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\le x^2+y^2\le 1\right\}$

講評

基本的な重積分の問題です.

(1) 積分順序に注意が必要です.(u で積分してから v で積分する.)

(2) 変数変換後の対応する積分領域を間違えやすいので注意が必要です. また,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n=2,4,6,\cdots)\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n=3,5,7,\cdots)\end{cases}$$

は必ず覚えておく必要がある公式のうちの 1 つです. 電通大の重積分の問題ではこの公式が必要となる場合が多いです.

解説

以下では, a を b で偏微分したものを a_b と表すことにする.

(1) $u=x+y,\ v=x-y$ とおくと, $x=(u+v)/2,\ y=(u-v)/2$. ヤコビアンは,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

$E=\{(u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\}$ とすれば,

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\iint_E\frac{v}{u^2v^2+1}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_0^1\frac{v}{u^2v^2+1}\,du\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_0^1\frac{du}{v(u^2+1/v^2)}\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\tan^{-1}uv\right]_0^1\,dv\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1\tan^{-1}v\,dv\\ &=\frac{1}{2}\left(\left[v\tan^{-1}v\right]_0^1-\int_0^1\frac{v}{1+v^2}\,dv\right)\\ &=\frac{\pi-2\log 2}{8}.\end{aligned}$$

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと, ヤコビアンは,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

$$\begin{aligned} x \geq 0,\ y \geq 0 &\Longleftrightarrow r\cos\theta \geq 0,\ r\sin\theta \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ x \leq x^2 + y^2 \leq 1 &\Longleftrightarrow x \leq x^2 + y^2 \ \wedge\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow r\cos\theta \leq r^2 \ \wedge\ r^2 \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow \cos\theta \leq r \leq 1 \end{aligned}$$

より, 変数変換後の D に対応する積分領域を E とすると,

$$E = \{(r,\theta) |\, \cos\theta \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

以上から,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \iint_E r\cos\theta \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta \\ &= \iint_E r^2 \cos\theta\, dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_{\cos\theta}^1 r^2\, dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\cos\theta}^1 d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \cos^4\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$