平成 28 年度 電気通信大学 特別編入学試験 数学 大問 5

複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して, 以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, e は自然対数の底とする.

(1) $f(z)$ のすべての極を求め, 各極における留数を求めよ.

(2) $z = Re^{i\theta}$ $(R > 1, 0 \leq \theta \leq \pi)$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ を求めよ.

講評

直接求めることが困難な広義積分を, 留数定理により計算する問題です. (2) の不等式の証明が少し難しいかもしれませんが, 複素関数分野の問題としては標準的な難易度の問題でしょう.

解説

以下では, $f(z)$ の極 α における留数を $\mathrm{Res}[f, \alpha]$ と表すことにする.

(1) $f(z)$ の分母を因数分解すると,

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$$

となるため, 極は $z = i, -i$ である. したがって, 各極における留数は,

$$\mathrm{Res}[f, i] = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = -\frac{i}{2e}, \quad \mathrm{Res}[f, -i] = \lim_{z\to -i} f(z)(z+i) = \frac{ei}{2}.$$

(2) *Proof.* $e^{iz} = e^{iRe^{i\theta}} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}$ より, $|e^{iz}| = e^{-R\sin\theta}$ であるから,

$$|f(z)| = \frac{e^{-R\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|}.$$

分子について, $-R\sin\theta \leq 0$ より, $e^{-R\sin\theta} \leq 1$.
分母について, $\cos 2\theta \geq -1$ より,

$$\begin{aligned}
|R^2e^{2i\theta}+1| &= |(R^2\cos 2\theta + 1) + iR^2\sin 2\theta| \\
&= \sqrt{(R^2\cos 2\theta + 1)^2 + R^4\sin^2 2\theta} \\
&= \sqrt{R^4 + 2R^2\cos 2\theta + 1} \\
&= \sqrt{(R^2-1)^2} \\
&\geq \sqrt{R^4 - 2R^2 + 1} = |R^2-1| = R^2-1.
\end{aligned}$$

以上から,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}. \qquad \square$$

(3) 複素平面上における点を A$(-R)$, B(R) とし, 線分 AB と曲線 $C_R=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|z=Re^{i\theta},\ 0\le\theta\le\pi\right\}$ で囲まれた閉曲線を C とする. このとき, C 上での $f(z)$ の複素積分は,

$$\oint_C f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}f(z)\,dz+\int_{C_R}f(z)\,dz$$

であり, $R\to\infty$ とすれば,

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz$$

となる. 留数定理より,

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,i]=\frac{\pi}{e}$$

を得る. すなわち,

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,dz=\frac{\pi}{e}$$

である. また, (2), $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ より,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}f(z)\,dz\right|=\left|\int_0^{\pi}f(z)\,iRe^{i\theta}d\theta\right|&\le\int_0^{\pi}|f(z)\,iRe^{i\theta}|\,d\theta=\int_0^{\pi}R|f(z)|\,d\theta\\&\le\int_0^{\pi}\frac{R}{R^2-1}\,d\theta=\frac{R\pi}{R^2-1}\to 0\ \ (R\to\infty)\end{aligned}$$

であるから, はさみうちの定理より,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=0.$$

よって,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=\frac{\pi}{e}$$

である. 複素積分の値と積分区間が実数であることに注意すると, $x\in\mathbb{R}$ として,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx.\end{aligned}$$

したがって,

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e}.$$